基于连续旋转波片调制的傅里叶解调方法研究

林哲宇[1,2]，徐稚[1*]

(1.中国科学院云南天文台，云南 昆明 650216；2．中国科学院大学，北京 100049)

摘要: 本文给出了在连续式旋转波片调制模式下的傅里叶分析的推导过程和解调公式，并利用理论偏振轮廓对公式的准确性进行了验证。分别采用了傅里叶分析和解调矩阵两种解调方法定量模拟了在连续式调制模式下波片的初始方位角误差、旋转定位误差以及探测器曝光过程中时间差占比三个因素对测量精度的影响。主要结论是：(1)简单的傅里叶分析不再适用于连续式调制的结果解调。文中给出的新傅里叶分析方法与解调矩阵方法在进行误差分析时，可以得到基本一致的结果。(2)考虑初始方位角误差引起的影响，我们发现对于线偏振信号来说，采用傅里叶分析和解调矩阵可得到非常一致的结果，而对于圆偏振来说，基于解调矩阵的方法得到的结果误差相对较小。但是两种解调方法都反映出初始方位角误差对圆偏振和线偏振产生的影响是一致，且相对误差的大小与偏振信号本身的强弱有关。初始方位角的误差要求在十几角秒量级才能满足结果的相对误差在10^{-3}量级以下。(3)考虑旋转定位误差引起的影响时，我们发现采用傅里叶分析和解调矩阵得到的结果非常接近。两者同时都显示出旋转定位误差对线偏振信号造成的影响更为明显，且相对误差的大小也与信号的强弱有关。当波片的重复定位精度在10″左右时，对10^{-2}量级的弱偏振信号来说，测量误差也能在10^{-3}的量级左右。从这一点上，我们发现连续式调制模式对波片旋转的定位精度要求要明显高于步进式调制模式。(4)两种解调方法的结果均显示，在连续式调制模式下，波片的调制周期与探测器曝光时长的时间差(Δ)会造成线偏振信号之间的串扰，即时间差占比(Δ/T)对线偏振信号造成的影响比对圆偏振信号的影响更为明显。当Δ/T小于1%时，线偏振信号相对误差达到10^{-3}量级。

关键词： 偏振测量；偏振调制；偏振解调；傅里叶解调。

中图分类号： P161.3　　**文献标识码：** A　　**文章编号：**

0 引 言

偏振辐射测量是获得天体物理状态的一个重要手段，光源或传播路径的各向异性是导致偏振产生的主要机制，因此偏振辐射可以提供有关诸如天体磁场或辐射场等矢量场的重要信息。在太阳实测物理中，利用某些原子谱线进行高精度偏振辐射测量是目前探测太阳矢量磁场的一种主要手段。偏振测量精度通常要求在10^{-3}或更高的量级。

我们通常采用斯托克斯偏振矢量，即$S_{in}=(I,Q,U,V)^T$ (T表转置) 来描述一束光的偏振特性。因为探测器只能测量强度信号，因此我们需要将4个偏振矢量进行线性组合并进行多次测量(或称之为偏振调制)，最后才能从测量的强度信号中反推出完整的偏振信息(或称为偏振解调)。实现偏振矢量线性组合的光学元件组称之为偏振分析器，通常由偏振调制器和检偏器两部分组成。偏振调制过程的数学表达可表示为$I_{obs}=O\cdot S_{in}$。其中O是一个$n\times 4$的

基金项目：国家自然科学基金“2.5 米大视场高分辨率太阳望远镜” (*2.5m Wide-field and High-resolution Solar Telescope*) 项目批准号：12127901、国家自然科学基金“NVST 望远镜高精度偏振光谱与矢量磁场的测量方法研究”(*High Precision Spectro-polarimetric observations and Vector magnetic field measurements of the NVST*) 项目批准号：11873901 资助

作者简介：林哲宇，男，硕士，主要研究方向为偏振测量。Email: linzheyu@ynao.ac.cn

通讯作者：徐稚，女，研究员，主要研究方向为太阳活动现象的光谱以及成像观测研究；偏振光谱与矢量磁场探测 ；太阳光谱仪。Email: xuzhi@ynao.ac.cn

矩阵(n为测量次数，$n \geq 4$)，被称为调制矩阵。解调过程则是调制过程的逆过程，可表达为$D \cdot I_{obs} = S_{in}$。这里D称为解调矩阵，是调制矩阵的逆[1]。利用正确的调制及解调矩阵，我们就可以根据观测计算出输入的偏振信号。

波片或波片组合是一种常见的偏振调制器元件。利用波片来实现偏振调制也有多种形式，例如，在电机带动下旋转固定延迟量的光学波片的快轴，或者通过改变电压来改变液晶波片的延迟量或光轴方向等等。相对使用液晶波片来说，使用光学波片的优点主要体现在以下几点[2]：(1) 性能比较稳定，在有效通光孔径范围内，波片的面形精度以及延迟量分布均匀性相对较好。(2) 波片的延迟量可以根据科学需求进行优化。优化原则通常是考虑到各种科学目标对不同偏振矢量的测量效率要求的不同。(3)适用于较宽的波长范围，消色差波片可以实现多波段的同时观测。因此多个太阳望远镜采用了可旋转光学波片作为偏振调制器，例如，地面设备有美国 Vacuum Tower Telescope 的 Advanced Stokes Polarimeter(ASP)[3]和 1.6 米口径的 Goode Solar Telescope (GST)[4]，中国的一米新真空太阳望远镜(NVST)[5]和光纤阵列太阳望远镜(FASOT)[6]等等。空间设备有日本的 Hinode 卫星的 SOT 仪器搭载的 SP 载荷[7]和探空火箭 CLASP2[8]等。用于日冕磁场测量的印度 Visible Emission Line Coronagraph(VELC)[9]日冕仪也是采用旋转波片作为偏振调制器。从上述仪器的偏振调制方式中我们发现，波片旋转可采用两种模式，一种是波片步进旋转，探测器在波片每步旋转到位并停止时进行数据采集(例如 NVST 和 FASOT)。另一种是波片连续旋转，探测器同步采集波片旋转过程中的强度变化(例如 GST，Hinode/SP， VELC 等)。

在两种模式中，等间隔采集是一种常见方式，即波片的旋转角度为$\theta = 2\pi/n$，n是在波片旋转一周所需要的步数或探测器采集的次数。以步进式情况为例，探测器采集到的强度信号I_{obs}与波片旋转角θ、波片延迟量δ以及入射偏振信号S_{in}之间的关系为[10]：

$$I_{obs}(\theta) = \frac{1}{2}[(I + aQ) + bQcos4\theta + bUsin4\theta + cVsin2\theta]\#(1)$$

其中，

$$a = \frac{1 + cos\delta}{2}, b = \frac{1 - cos\delta}{2}, \quad c = -sin\delta; \#(2)$$

我们发现，Q、U以相同的频率(4倍波片旋转的频率)被调制进入I_{obs}，但两者相位相差$\pi/2$。V则以2倍波片旋转的频率调制进入I_{obs}。Q、U和V的调制振幅(即a、b和c)也仅与波片延迟量δ有关。因此，除了使用解调矩阵(即利用前述公式$S_{in} = D \cdot I_{obs}$)计算出入射的S_{in}外，我们还可以根据傅里叶分析解调出S_{in}。即，

$$\begin{aligned} Q &= 2Re4/b = 2Re\left\{FFT\left[I_{obs}\left(f = \frac{2}{\pi}\right)\right]\right\}/b \\ U &= 2Im4/b = 2Im\left\{FFT\left[I_{obs}\left(f = \frac{2}{\pi}\right)\right]\right\}/b \quad \#(3) \\ V &= 2Im2/c = 2Im\{FFT[I_{obs}(f = \frac{1}{\pi})]\}/c \end{aligned}$$

这里符号Re和Im分别代表傅里叶分析频率的实部和虚部，而数字‘4’或者‘2’则代表对应的傅里叶分析频率，并与f的值相对应。

但是在连续式旋转模式下，公式(1)需要进行调整，即进行角度积分(详见下文的公式推导)，此时上文提到的简单的傅里叶解调公式就不再适用了。因此针对连续式调制，人们还是普遍采用基于解调矩阵D的解调方法[4, 7, 9]。

相对于步进式来说，连续式波片旋转在调制频率上具有明显的优势，在国际上得到普遍使用。因此，本文的研究工作主要是针对连续式波片旋转模式展开，首先推导出了该调制模

式下精确的傅里叶分析的解调公式，并利用理论模拟验证了公式的正确性。随后利用两种不同的解调方法(解调矩阵以及傅里叶分析)，分析了波片的初始方位角误差、波片旋转定位误差以及探测器采集过程中的时间差占比等因素对解调结果的影响。最后给出讨论分析和结论。

1 公式推导与验证

在本节中，我们首先给出连续式旋转波片的傅里叶解调公式的推导过程，然后理论模拟已知偏振矢量的连续式调制观测，之后分别利用新推导出的公式以及步进式情况下的公式对模拟观测结果进行傅里叶分析，最后将解调结果与已知的输入信号进行比较，验证公式的正确性。

1.1 公式推导

在连续式模式下，探测器单次曝光采集得到的强度为：

$$I_{obs}^{j} = O_I^j\, I + O_Q^j Q + O_U^j\, U + O_V^j V \qquad \#(4)$$

其中，O是调制矩阵，具体表达为：

$$O_I^j = \frac{1}{\Delta\theta^{\,j}}\int_{\theta_1^j}^{\theta_2^j} d\theta = 1$$

$$O_Q^j = \frac{1}{\Delta\theta^{\,j}}\int_{\theta_1^j}^{\theta_2^j}(a + b\,cos4\theta)d\theta \quad \#(5)$$

$$O_U^j = \frac{1}{\Delta\theta^{\,j}}\int_{\theta_1^j}^{\theta_2^j} b\,sin4\theta d\theta$$

$$O_V^j = \frac{1}{\Delta\theta^{\,j}}\int_{\theta_1^j}^{\theta_2^j} c\,sin2\theta\, d\theta$$

其中a、b、c的定义与公式(2)相同。$j = 1$，2...n（n 代表在波片旋转一周内探测器的采集总次数）。在探测器第j次曝光过程中，波片快轴从θ_1^j转到θ_2^j，期间波片快轴扫过的角度为$\Delta\theta^j = \theta_2^j - \theta_1^j$。当探测器曝光采集时间相等，即均匀采集时，$\Delta\theta^{\,j} = \Delta\theta = 2\pi/n$。如果假设波片快轴初始位置与检偏器的透过轴方向存在一定的夹角 α，那么$\theta_1^j = \alpha + (j-1)\Delta\theta$。将积分公式计算后带入公式(4)，可以得到观测到的强度轮廓为以下表达式：

$$\begin{aligned} I_{obs}^{j} &= I + aQ \\ &+ \cos(4\theta_1^j)\frac{1}{\Delta\theta^j}\left[\frac{\mathrm{b}\sin(2\Delta\theta^j)\cos(2\Delta\theta^j+4\alpha)}{2}Q + \frac{\mathrm{b}\sin(2\Delta\theta^j)\sin(2\Delta\theta^j+4\alpha)}{2}U\right]\# \\ &+ \sin(4\theta_1^j)\frac{1}{\Delta\theta^j}\left[\frac{\mathrm{b}\sin(2\Delta\theta^j)\cos(2\Delta\theta^j+4\alpha)}{2}U - \frac{\mathrm{b}\sin(2\Delta\theta^j)\sin(2\Delta\theta^j+4\alpha)}{2}Q\right]\# \\ &- \sin(2\theta_1^j)\frac{c}{\Delta\theta^j}sin(\Delta\theta^j)\,cos(\Delta\theta^j+2\alpha)V - \cos(2\theta_1^j)\frac{c}{\Delta\theta^j}sin(\Delta\theta^j)\,sin(\Delta\theta^j+2\alpha)V\#(6) \end{aligned}$$

分析上述公式我们发现，Q，U，V信号不再如前文的公式(1)-(3)所示的那样与某种调制频率存在一个简单的对应关系，例如$cos4\theta_1^j$的系数中既包含了Q信号也包含了U信号。V信号仍然只与 $cos2\theta_1^j$ 的系数有关。因此，经过一系列的代数运算，我们推导出了新的傅里叶分析的解调公式如下：

$$Q\ = 2\frac{\cos(2\Delta\theta^j)\,Re4\ \ - \sin(2\Delta\theta^j+4\alpha)\,Im4}{bsin(2\Delta\theta^j)}$$

$$U = 2\frac{sin(2\Delta\theta^j + 4\alpha)Re4 + (2\Delta\theta^j + 4\alpha)Im4}{b\,sin(2\Delta\theta^j)}, \#(7)$$

$$V = 2\frac{Im2}{csin(\Delta\theta^j)cos(\Delta\theta^j + 2\alpha)}$$

其中，Re4、Im4和Im2的含义与公式(3)中的一样。

1.2 公式准确性的仿真验证

接下来，我们利用理论模拟信号对公式(7)的解调方法的准确性进行验证，思路如下：

（1）利用Rybicki-Hummer (RH) 偏振辐射转移程序[11-12]模拟生成理论FeI原子谱线的偏振轮廓。计算时采用一维平面平行大气假设，宁静区FALC大气模型以及典型磁场位形(磁场强度1000高斯，倾斜角45°，方位角45°)。工作谱线FeI中心波长630.15 nm。理论计算偏振轮廓如图1中实线所示。这里需要指出的是，我们使用偏振轮廓 $S_{in}(\lambda)$ 而不使用一组特定的偏振矢量 S_{in}，因为不同的波长点具有强、弱不同的偏振信号，可以更好的验证解调公式的普适性。

（2）模拟理想的8步连续式波片调制模式。即在波片旋转半圈(即一个调制周期)的过程中探测器均匀采集8次。此时$\Delta\theta = 22.5^{\circ}$，波片延迟量选择$\delta = 127^{\circ}$。根据公式(6)计算所得到波片旋转1圈过程中的强度轮廓I_{obs}变化。分别利用公式(3)和(7)对理论强度轮廓I_{obs}进行傅里叶分析方法来解调。

（3）对比已知偏振轮廓与两种解调结果。

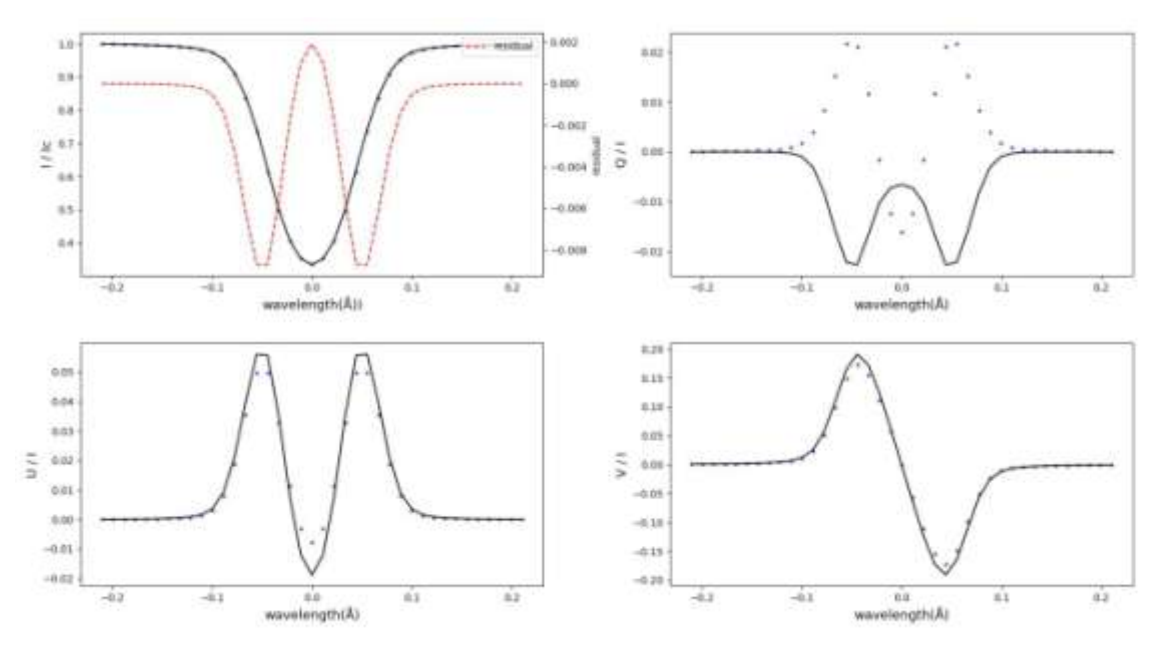


图 1 已知偏振轮廓与简单傅里叶解调轮廓的对比。从左到右，从上到下，分别是 I/Ic、Q/I、U/I、V/I 轮廓。实线为已知的偏振轮廓，点为利用公式(3)中简单傅里叶解调得到的结果。左上子图中，虚线代表傅里叶解调的强度轮廓与理论强度轮廓的差值。

Fig. 1 Comparison between the synthetic Stokes profiles (solid line) and the Fourier demodulation results (dots). Here we demodulate Stokes profiles by using Eq. (3). From left to right and top to bottom, we display the profiles of I/Ic, Q/I, U/I, V/I, respectively. In the left-top panel, the dashed line (red) illustrates the residual between the synthetic Stokes I/Ic profile and the demodulated one.

首先理论轮廓显示出，在我们特殊的磁场位形的假设下，Q/I信号最弱(最大值约0.02)，

U/I稍强(大约是Q/I的3倍)，V/I最强(最大值约0.15）。

其次，我们在图1中先展示了采用简单傅里叶分析(即公式(3))得到的结果与已知偏振轮廓的对比。各子图分别展示了 I/Ic、Q/I、U/I和V/I 的情况。实线为输入的理论偏振轮廓，点为傅里叶解调结果。对比输入值和结果我们明显发现：在理想的情况下，简单的傅里叶分析的解调结果与输入的理论轮廓明显不同，特别是在线芯以及近线翼(Δλ≈0.05 nm)的强偏振信号区域。差异最明显的情况发生在最弱的 Q/I 轮廓中，甚至发生了符号反转。而U/I、V/I 轮廓的最大差异的相对值也到25%。I/I_c 轮廓看似相同，但从两者的残差上看出他们最大相对差异也有接近2% 。

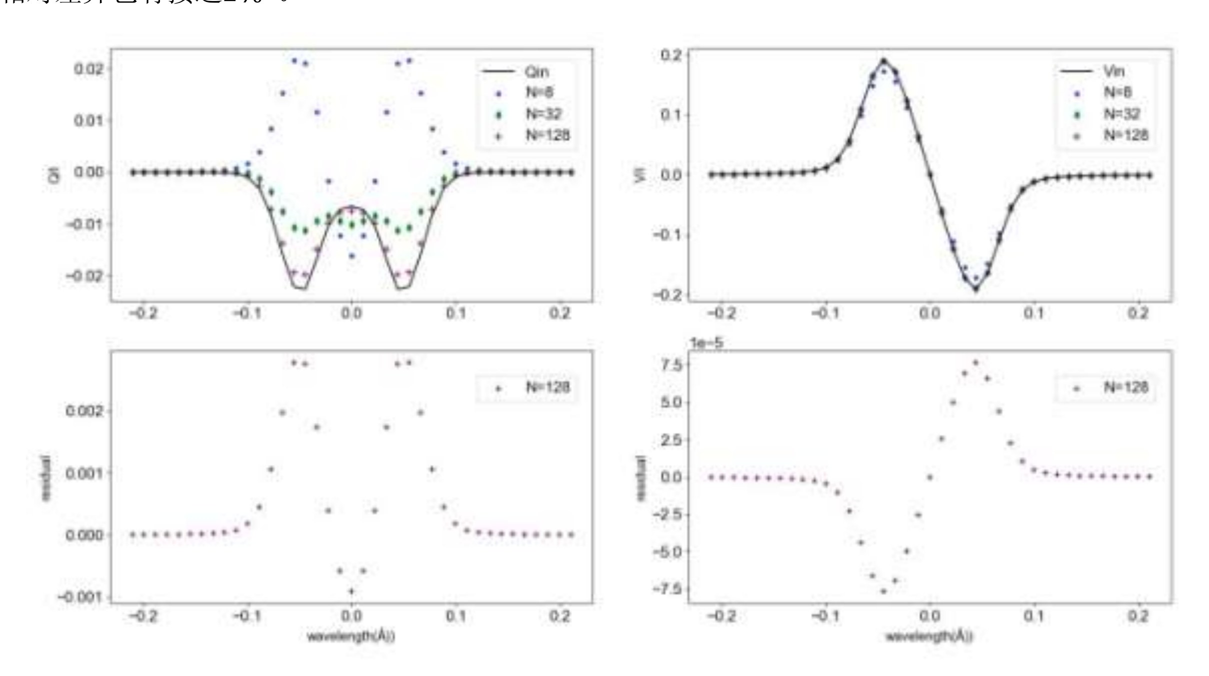


图 2 在不同的采集帧数情况下，已知偏振轮廓与简单傅里叶解调轮廓的对比。左（右）上：Q/I（V/I）轮廓对比，采集帧数分别为 8、32 和 128。下：n=128 时，已知轮廓与解调轮廓的残差。

Fig. 2 Comparison between the synthetic Stokes profiles (solid line) and the Fourier demodulation results when the number of samples per half-rotation of the waveplate increases. Left(right)-upper panel: The Q/I (V/I) profile. Bottom: The residual of the synthetic profile and the demodulated results with the number of samples equal to 128.

为了分析上述误差与一个周期内的采集次数的关系，我们将采集次数从8次增加到32和128。结果如图2所示。图2左、右子图分别展示了Q/I信号和V/I信号。我们发现随着采集帧数的逐渐增加，输入和输出信号的残差有所减小。当N=128时，Q/I信号的残差最大依然能达到3×10^{-3}(是偏振信号本身的10%)，V/I信号的残差非常小，最大约为7.5×10^{-5}，(是偏振信号本身的0.04%)，但非常明显的是，两者残差的轮廓都与偏振信号本身的轮廓非常相似，并不是随机误差。

接下来，我们采用新的傅里叶分析方法（公式（7））进行解调，结果展示在图3中。解调结果与理论输入值的差异与图1构成了鲜明的对比。为了突出差异，我们在每张子图中给出了两者的残差。从残差来看(虚线)，解调后的轮廓与输入轮廓几乎没有明显差异，在整个轮廓范围内残差都维持在一个极低的误差范围(10^{-16}~10^{-17})。

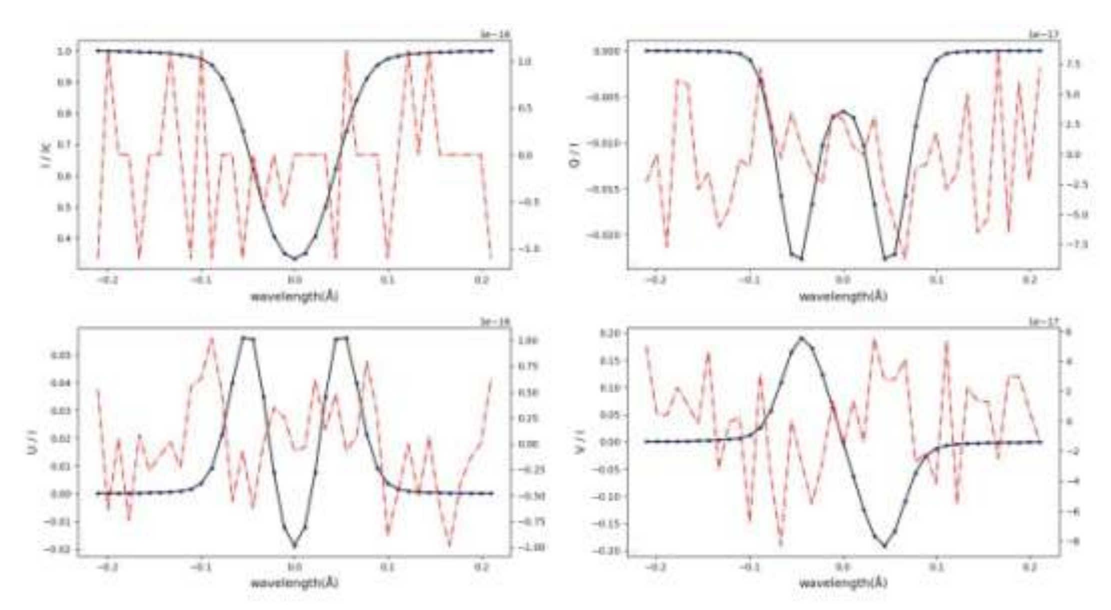


图 3 已知偏振轮廓与新傅里叶解调轮廓的对比。实线为已知输入偏振轮廓，点为利用公式(7)得到的新傅里叶解调结果，点-短实线(红色)为两者的残差。

Fig. 3 Comparison between the synthetic Stokes profiles (solid line) and the Fourier demodulation results(dots). Here the demodulated Stokes profiles are retrieved using the formulas in Eq.(7). The dash-dotted line shows the residual between these two profiles.

图1、2的结果与图3中的结果对比充分展示了简单的步进式傅里叶分析公式已经不再适用于连续式波片旋转调制的解调，而本文推导出的新傅里叶解调公式则能非常准确得给出解调结果。因此，下文中所提及的傅里叶分析或傅里叶解调均是指的公式(7)中给出的方法。

2 不同解调方法与连续式调制过程中的误差分析

从公式(6)可以看出，有几个变量的误差会影响连续式旋转波片的调制结果，包括波片的初始方位α角(波片的快轴方向与检偏器的透过轴方向的夹角)、旋转波片的定位误差、波片旋转速度与探测器曝光时间不匹配等等。本节中，我们分别使用解调矩阵与傅里叶分析两种不同的解调方法，定量分析上述变量的误差对解调结果的影响。

2.1 初始方位角误差

光路中，波片的快轴与检偏器的透过轴方向会存在一定的夹角α，称之为波片的初始方位角误差。在实际工作中，我们无法知道α 的精确值，因此产生一定的计算误差。在模拟该误差的影响时，我们的分析思路如下：

（1）输入已知偏振信号，$S_{in} = (1, Q/I, U/I, V/I)^T = (1, 0.02, 0.06, 0.2)^T$，分别代表弱、中、强偏振信号(此后$Q/I$、$U/I$、$V/I$信号统一用$Q$、$U$、$V$信号指代)。模拟8步连续式调制过程，设波片初始方位角为α，在探测器单次曝光过程中波片转动角度$\pi/8$ ，波片延迟量127°。根据公式(6)生成所观测到的强度轮廓I_{obs}。

（2）采用解调矩阵和傅里叶分析方法分别对观测到的强度轮廓进行解调，对比解调结果与输入结果的相对误差，定义为$|S_{in} - S_{out}|/S_{in}$。因为α值大小未知，所以计算解调矩阵或傅里叶分析时都设为$\alpha = 0°$的理想情况。8步连续式调制的理想调制矩阵O如下，其解调矩阵采用$\mathrm{D} = (\mathrm{O}^{\mathrm{T}}\mathrm{O})^{-1}\mathrm{O}^{\mathrm{T}}$ [1]计算，解调结果为$S_{out} = D \cdot I_{obs}$。用傅里叶解调方法时我们使用公式(7)(其中α 设为0°)。

$$O=\begin{bmatrix}1.000 & 0.709 & 0.510 & -0.298\\ 1.000 & -0.311 & 0.510 & -0.719\\ 1.000 & -0.311 & -0.510 & -0.719\\ 1.000 & 0.709 & -0.510 & -0.298\\ 1.000 & -0.311 & 0.510 & 0.298\\ 1.000 & -0.311 & 0.510 & 0.719\\ 1.000 & 0.709 & -0.510 & 0.179\\ 1.000 & 0.709 & -0.510 & 0.298\end{bmatrix} \#(8)$$

（3）初始方位角α在为0°~0.1°范围内变化，根据步骤(1)和(2)定量计算α与解调结果相对误差的大小关系。如图3所示。

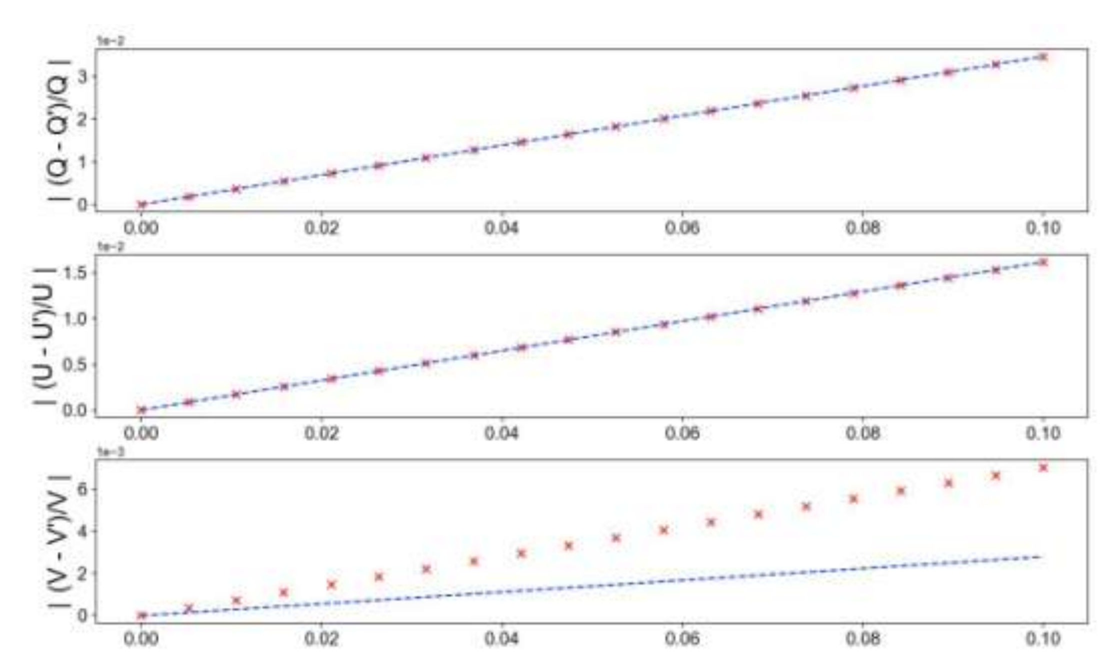


图 4 旋转波片的初始方位角误差对解调结果的影响。已知的输入偏振信号为 $S_{in}=(1,0.02,0.06,0.2)^T$。调制方式详见正文描述。初始方位角度误差(α)变化范围为0°~ 0.1°。我们对观测信号分别采用傅里叶分析("×"点)和解调矩阵(虚线)两种方法进行解调。从上到下分别展示了两种方法的解调出的 Q，U，V 信号与输入值之间的相对误差。

Fig. 4 Relative errors of the Stokes parameters Q,U,V caused by the home-position error of the rotating waveplate. The input Stokes vectors are set to be $S_{in}=(1,0.02,0.06,0.2)^T$. The modulation process can be seen in the text. The results derived by the Fourier demodulation are shown by the symbols of "×", while the results derived by using the demodulation matrix are plotted by the dashed line.

图4展示了采用两种解调方法得到的解调结果相对误差与初始方位角的关系。虚线代表解调矩阵方法的结果，'×'号代表傅里叶分析的结果。首先，无论用哪种方法，随着α的增加，Q、U、V的相对误差均明显增加。对于线偏振信号来说，两种方法给出的结果基本一致(残差非常小，在10^{-6}量级以下)。但是对圆偏振信号来说，傅里叶分析结果呈现出较大的相对误差，大约是用解调矩阵得到的2倍左右。针对这个情况我们做了进一步分析，发现可以通过增加一个调制周期内的探测器的采集频率(例如由8次采集增加为16次)，但是这种方法在实际工作中并不太适用，我们会在结果部分进行讨论。其次，图中Q，U的相对误差有一定的差别，说明相对误差的大小与信号本身的强弱有关。当我们进一步将输入的Q，U，V信号设定为一样大小的时候，他们的相对误差则基本相同，说明初始方位角误差对于三者的影响是一致的。因此，对于比较弱的10^{-2}量级的偏振信号来说，例如此处的Q信号($Q=0.02$)，两种解调方法都给出一致的要求，即，当相对误差控制在10^{-3}量级以内时，初始方位角的误差

要求小于0.004°(约14″）。

2.2 波片定位误差

波片旋转定位误差主要是由带动其旋转的电机的转速不稳定造成，转速不稳定会导致在探测器每次曝光过程中，波片快轴的旋转角度不再是一个稳定值(即每次的$\Delta\theta^j$不同）。经过调研得知，目前常用的高精度电机在达到匀速转动的状态之后，重复定位精度可以达到10″左右，因此我们针对这个量级的定位误差进行了蒙特卡洛模拟。我们的分析思路如下：

(1) 输入已知偏振信号$S_{in} = (1, 0.02, 0.06, 0.2)^T$。模拟8步连续式调制，探测器单次曝光过程中波片转动角度$\pi/8 \pm \alpha$，α为0到10″内的随机数。波片延迟量127°。根据公式(6)生成所观测到的强度轮廓I_{obs}。

(2) 采用理想解调矩阵和傅里叶分析方法分别对观测到的强度轮廓进行解调。计算解调结果与输入值的相对误差。

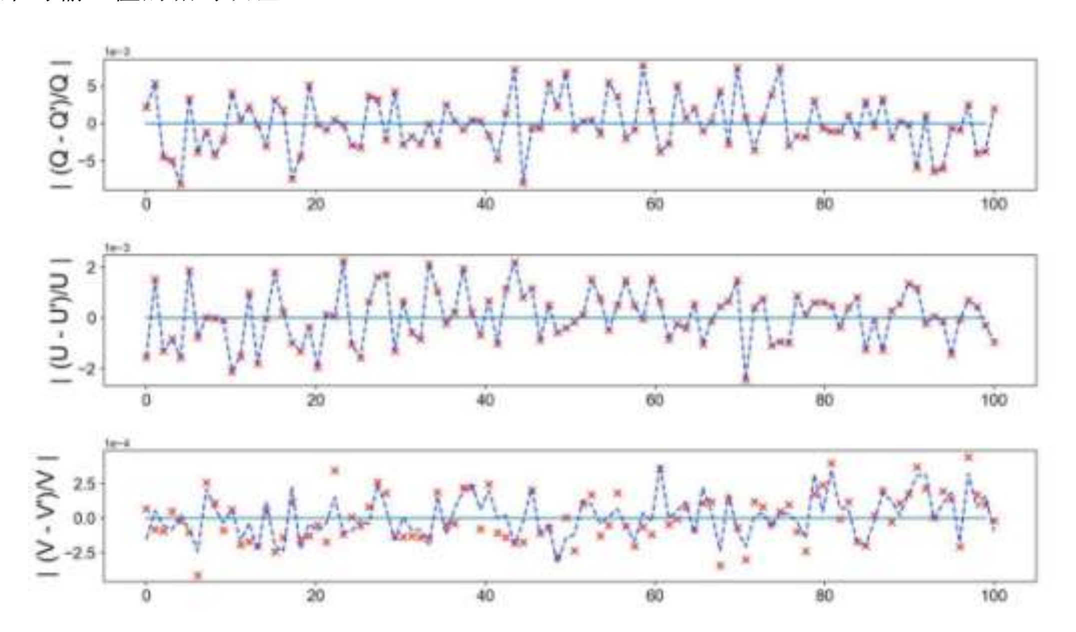


图 5 波片旋转定位误差对解调结果的影响。输入偏振信号与图 3 相同。调制方式详见正文描述，调制过程中波片旋转定位误差范围 ±10″，随机模拟 100 次独立调制过程。分别采用傅里叶分析("×"点)和解调矩阵(虚线)两种方法解调并给出解调结果与输入值之间的相对误差。

Fig. 5 Relative errors of the Stokes parameters Q, U, V caused by the angle accuracy of the rotation waveplate. Input Stokes parameters are the same as the one in Fig. 3. 100 times modulation are operated with the angle accuracy within a range of ±10”. The symbols "×" indicate the relative errors of the results inferred by the Fourier demodulation, while the dashed line shows the one demodulated by using the demodulation matrix.

图 5 展示了波片定位误差对解调结果相对误差的影响。在模拟了 100 次独立调制的结果后，我们发现：两种解调方法给出的线偏振信号以及圆偏振的相对误差非常接近。当输入信号是$S_{in} = (1, 0.02, 0.06, 0.2)^T$时，$Q$，$U$，$V$的相对误差的 rms 值分别为 3.7×10^{-3}、1.1×10^{-3}和 1.8×10^{-4}。我们进一步计算发现当输入信号$Q = U = V = 0.02$时，三者的相对误差的 rms 值分别是 3.7×10^{-3}、 3.5×10^{-3} 和 2.9×10^{-3}。这不仅说明相对误差的大小与信号的强弱有关，也说明定位误差对圆偏振信号造成的影响略为小于对线偏振信号的影响。最后，对 10^{-2}量级 Q 信号来说，10″的波片定位精度所产生的相对误差也在 10^{-3}的量级左右。

2.3 时间差占比引起的测量误差



图 6 波片调制周期与探测器采集频率的时间差异。假设波片完成一个调制周期需要$n\times T$，在 T 时刻内探测器实际曝光时间为T_{exp}，两者差异为Δ。

Fig. 6 Difference between the time required for the waveplate to complete one rotation slot during one modulation cycle and the time taken by the detector to collect the photons.

假设波片无定位误差，并在T时间间隔内匀速旋转过一个特定角度($180°/n$)，然而，期间探测器的实际曝光时长只有T_{exp}，两者存在一个时间差Δ ($T^j - T_{exp}{}^j$)，探测器并没有采集Δ时间内的光强，故而产生了误差。我们将两者的时间差Δ与时间T的比值称为时间差占比(即Δ/T)。此时探测器单次曝光时间内波片实际转动过的角度为$\left(1-\frac{\Delta}{T}\right)*180/n$。在图7中，我们模拟了Δ/T从 0%增加到2%时，解调结果与输入值之间的相对误差情况。在本节中，输入的偏振信号为$S_{in} = (1,0.02,0.02,0.02)^T$，即线偏振与圆偏振信号强弱相等。

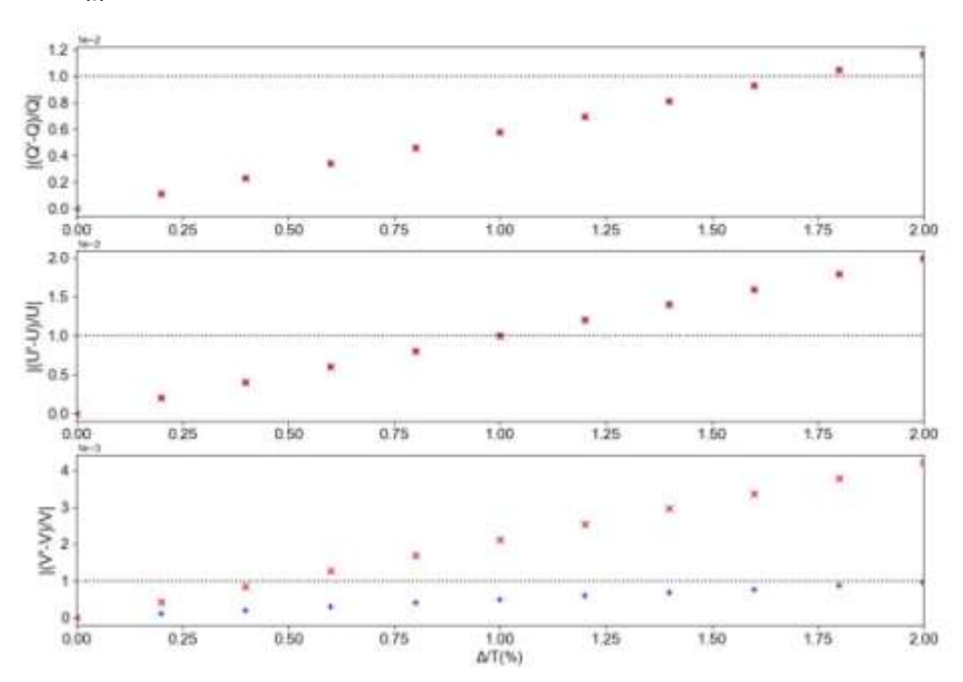


图 7 时间差占比对解调结果的影响。输入信号大小与图 3、4 中的相同。时间差占比由 0 增加至 2%，解调结果分别采用傅里叶分析("×"号)和解调矩阵("+"号)获得。上、中子图中的虚线代表 10^{-2}，下子图中的虚线代表 10^{-3}。

Fig. 7 Effect of time difference between the waveplate rotation slot time and the detector frame time on the modulation. The x-axis means the time difference as a percent of the waveplate rotation slot time. "×" represents the results retrieved from the Fourier demodulation, while the "+" indicates the one using the demodulation matrix. Dotted lines in the upper and middle panels indicate the errors of 10^{-2}, while the one in the bottom indicate the error of 10^{-3}

由图 7 我们发现：两种解调方法得到的结果基本一致，当Δ/T逐渐增大时，解调结果的

相对误差都会随之增大，两种结果的明显区别仍然是针对圆偏振信号的解调，使用解调矩阵得到的相对误差会比较小。同时我们可以看到，相比于圆偏振信号，时间差占比的变化对线偏振信号造成的影响更为明显。从U信号分析发现，若相对误差要控制在 10^{-3} 的量级时，Δ/T 要小于 1%。我们同时也分析了$S_{in}=(1,0.02,0.02,0.2)^T$的情况，即$V$信号增强了 10 倍，依然发现时间差占比的变化对圆偏振信号的影响也非常弱，与图 7 的结果非常类似，因此没有展示。这说明时间差主要引起的是线偏振信号之间的串扰。最后这里需要指出的一点是，本工作的模拟只是针对 1 个调制周期，如果进行多个周期的调制，那么微小的Δ会积少成多，误差会逐步放大。

3 讨论与结论

本文给出在连续式旋转波片调制模式下的傅里叶分析的推导过程和解调公式（公式7)，并利用理论偏振轮廓对公式的准确性进行了验证。这里我们需要着重指出公式 (7) 中对V信号的解调，利用虚部比实部能得到更加准确的结果。接着，我们分别采用了傅里叶分析和经典的解调矩阵两种解调方法，利用理论模拟定量计算了波片的初始方位角误差、旋转定位误差以及探测器曝光过程中时间差占比三个因素对解调结果准确性造成的误差，即对偏振测量精度的影响。这里我们逐一对主要结论进行讨论和总结：

（1）波片初始方位角误差的影响：对于线偏振信号来说，采用傅里叶分析和解调矩阵可以得到比较一致的结果。当测量的偏振信号在10^{-2}量级时(这在太阳物理实测时是常见的)，若要求结果的相对误差在10^{-3}量级以内，那么初始方位角的误差要求小于0.004°(即14″ 左右）。但是，我们发现对于圆偏振信号来说，傅里叶分析的方法得到的相对误差比较大，从这一点来看，采用解调矩阵方法可以克服初始方位角误差带来的影响。另外，我们发现初始方位角误差对圆偏振和线偏振产生的影响是一致，且相对误差的大小与偏振信号本身的强弱有关。这里我们对比了Liang等人(2019)的结果[13]。他们的误差分析是基于步进式旋转波片调制及简单的傅里叶分析方法。他们的结果(我们进行了同样的模拟并肯定了他们的结果)显示初始方位角的误差对圆偏振信号的相对误差几乎没有影响。他们基于线偏振信号的分析结果则与本文一致。因此我们认为，相对于步进式调制，连续式调制对初始方位角的定位精度要求更高。

（2）波片旋转定位误差的影响：无论对于线偏振还是圆偏振信号，两种解调方法结果基本一致。两个结果均显示旋转定位误差对线偏振信号造成的影响更为明显，且相对误差的大小与信号的强弱有关。定量分析发现，当波片的重复定位精度在10″ 左右时 (符合常见高精度电机的性能指标)，对10^{-2}量级的弱偏振信号来说，测量误差也能在10^{-3}的量级左右。Liang等人(2019)[13]给出在步进式调制时，当要求相对测量误差在10^{-3}的量级左右时，波片的定位精度可以放宽到0.1°。因此我们认为在相同的测量误差要求的前提下，连续式调制比步进式调制模式对波片旋转的定位精度要求更高。

(3) 探测器采集过程中时间差占比的影响：这个影响仅仅存在于连续式调制模式下。在理想情况下，我们要求$T=T_{exp}$，而实际测量情况下，由于图像存储或数据转移需要一定的时间Δ，这会造成调制方式偏离理想情况，导致解调结果出现误差。Δ一般在μs量级，相对于太阳观测通常采用的几十ms的曝光时间来说，这个值非常小。而且我们发现，时间差造成的影响主要是线偏振之间的相互串扰，Δ/T在1%左右时，对圆偏振信号的相对误差的影响接近10^{-4}量级。另外，在连续式采集模式下，除了时间差以外，我们还应关注探测器采集帧频与波片旋转速度之间的匹配问题，利用探测器的采集帧频对波片的旋转速度下限提出要求。

(4) 最后值得指出的是，虽然没有定量计算，但我们发现，增加一个调制周期内探测器的采集频率后，无论使用哪种解调方法，偏振测量精度都会有所提高，但是增加采集频率会造成数据量的增加以及调制频率或者时间分辨率的降低[14]，因此综合考虑各种因素后，我们在本文的工作中仍采用常见的一个周期采集8帧的模式。

参考文献:

[1] J, C, del, Toro, Iniesta, M, et al. "Optimum modulation and demodulation matrices for solar polarimetry. " Applied Optics (2000).

[2] Iglesias, F. A. , and A. Feller . "Instrumentation for solar polarimetry: state of the art and prospects.", 10.1117/1.OE.58.8.082417. 2019.

[3] Elmore D F , Lites B W , Tomczyk S , et al. Advanced Stokes polarimeter: a new instrument for solar magnetic field research[J]. Proc Spie, 1992, 1746:814.

[4] Cao, W. , Ahn, K. , Goode, P. R. , Shumko, S. , & Coulter, R. . (2011). The new solar telescope in big bear: polarimetry ii. Bulletin of the American Astronomical Society.

[5] Hou J F , Xu Z , Yuan S , et al. Spectro-polarimetric observations at the NVST: I. instrumental polarization calibration and primary measurements[J]. Research in Astronomy and Astrophysics, 2020, 20(4):045.

[6] Qu Zhongquan . A Fiber Arrayed Solar Optical Telescope (FASOT)[J]. 太阳物理研究组, 2011, 437:423.

[7] Ichimoto, K. , Lites, B. W. , Elmore, D. , et al. (2008). Polarization calibration of the solar optical telescope onboard hinode. Solar Physics, 249(2), 233-261.

[8] Ishikawa, R. , Kano, R. , Song, D. , et al. (2018). Sounding Rocket Experiment CLASP2: Development of the UV High-Precision Polarization Spectroscopy Device. Astronomical Society of Japan (ASJ) 2018 Autumn Annual Meeting. Singh J , Prasad R B , Venkatakrishnan P , et al. Proposed visible emission line space solar coronagraph[J]. Current Science, 2011, 100(2):167-174.

[9] Singh J , Prasad R B , Venkatakrishnan P , et al. Proposed visible emission line space solar coronagraph[J]. Current Science, 2011, 100(2):167-174.

[10] Lites, Bruce W. (1987). Rotating waveplates as polarization modulators for stokes polarimetry of the sun: evaluation of seeing-induced crosstalk errors. Applied Optics, 26(18), 3838-45.

[11] Uitenbroek, H. 2001, ApJ, 557, 389

[12] TMD Pereira, Han U . RH 1.5D: a massively parallel code for multi-level radiative transfer with partial frequency redistribution and Zeeman polarisation[J]. Astronomy & Astrophysics, 2015, 574.

[13] Liang Yu, Qu Zhongquan, Zhong Yue, et al. Analysis of errors in polarimetry using a rotating waveplate.[J]. Applied optics, 2019, 58(36):9883-9895.

[14] K.Nagaraju, B. Raghavendra Prasad, Bhavana S. Heged, et al. "Spectropolarimeter on board the Aditya-L1: polarization modulation and demodulation." Optical Society of America 26(2021).

Fourier Demodulation of the Continuously Rotating Waveplate Modulation and the Error Analysis

Lin Zheyu[1,2], Xu Zhi[1*]

(1. Yunnan Observatories, Chinese Academy of Sciences, Kunming 650216, China

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Continuously rotating waveplates as the polarization modulator is an important candidate polarimeter configuration for many solar telescopes to measure the solar magnetic field. It is widely adopted in many ground-based or space-based solar telescopes for the solar magnetic field measurement. In this paper, we present the derivation and formula of the Fourier demodulation in the context of continuously rotating waveplates. We further testify the formula correctness by using the synthetic FeI Stokes profiles, which are produced by the RH radiative transfer code with a given atmosphere

model. In addition, we calculate the effect of the home-position errors, the positioning errors of the waveplate rotation and the time difference between the waveplate slot time and the detector frame time on the demodulated results, by using two kinds of demodulation methods, i.e., the demodulation matrix and the Fourier analysis. The main findings are: (1) The new Fourier analysis can provide more accurate results than the simple one adopted by the step-wise modulation. Similar results are obtained when we do the relative error estimation using these two demodulation methods. (2) Considering the relative errors due to the home-position angle error, we find the demodulated linear polarization are almost the same using these two methods. However, in the case of circular polarization, the demodulation based on the demodulation matrix is more reliable. Whatever which method is applied, it is shown that the home-position angle error has the same effect on both the circular and linear polarization. The relative error of 10^{-3} requires the home-position angle accuracy within ten arc seconds. (3) Calculating the relative error caused by the position error of the waveplate rotation, we find the demodulation results are almost equal using these two methods. Both of them show that the position error has more influence on the linear polarization. Furthermore, the requirements of the position accuracy are much higher (ten of arc seconds) than that in the case of step-wise modulation (0.1 degree) in order to achieve the relative error of 10^{-3}. (4) It is crucial to precisely match the detector frame time and the waveplate rotation slot time. We investigate the relative error due to the difference between them and find that the time difference (Δ) can cause cross-talk between the linear polarization signals. It has more prominent effect on the linear polarization than on the circular polarization. The time difference as a percent of the waveplate slot time (Δ/T) is required to be smaller than 1% if the relative error is smaller than 10^{-3} for the linear polarization.

Key words: Polarization measurement; Polarization modulation; Polarization

demodulation；Fourier demodulation